固体力学諸問題の新しい離散化解析法の研究

富士総合研究所　◯川井　忠彦、加藤　国男

（1）本研究の目的と成果

現状の大規模並列計算の当面する壁（メッシュ分割自動化及び、並列計算における粒度問題）を打破るため、仮想仕事の原理の一般化と選点法からの脱出を目標にした新しい偏微分方程式の解法を開発した。そして、一連の固体力学の基礎的問題についてその実用性を検証した。近い将来本手法は理工学分野の研究及び設計に留らず、時間的空間的に変動する現象の数値解析法として広い分野で使用されるであろう。

（2）一般化仮想仕事の原理の導出と新解析法の展開

有限要素法（変位法）の基礎となっている仮想仕事の原理：

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dv - \int_V \bar{p}_i\delta u_i dv + \int_{S_\sigma} \bar{t}_i\delta u_i ds = 0 \quad \text{付帯境界条件：} u_i - \bar{u}_i = 0 \quad \text{on } S_u, \quad S=S_\sigma+S_u$$

にLagrangeの未定係数法を適用し、付帯境界条件を消去すると最終的に次の様な一般化された(1)仮想仕事の原理が導かれる。

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i)\delta u_i dv - \int_{S_\sigma} (t_i - \bar{t}_i)\delta u_i ds + \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i)\delta t_i ds = 0$$

(2)式において(a)平衡条件(b)変位境界条件(c)応力境界条件の可能な全ての(2)組合わせを考えると表１に与える８つの異なった解法が存在することが判り、有限要素法の今後の新しい発展の方向を明確に捉えることが出来た。

表１．新離散化解析法における８つの解法

	変分方程式	制約条件	備考
1	$\int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)\delta u_i dV - \int_{S_\sigma} (T_i - \bar{T}_i)\delta u_i dS + \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i)\delta T_i dS = 0$		Modified Hellinger-Reissner 法 非平衡自己要素解を用いる最も一般的解法(HRMと略記)
2	$\int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)\delta u_i dV - \int_{S_\sigma} (T_i - \bar{T}_i)\delta u_i dS = 0$	$u_i - \bar{u}_i = 0 \, on \, S_u$	変位法(DM)
3	$\int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)\delta u_i dV + \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i)\delta T_i dS = 0$	$T_i - \bar{T}_i = 0 \, on \, S_\sigma$	Kawai モデル (剛体ばねモデル）はこの方法の原型
4	$\int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)\delta u_i dV = 0$	$T_i - \bar{T}_i = 0 \, on \, S_\sigma$ $u_i - \bar{u}_i = 0 \, on \, S_u$	Galerkin 法 固有値解析に適す
5	$\int_{S_\sigma} (T_i - \bar{T}_i)\delta u_i dS - \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i)\delta T_i dS = 0$	$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \, in \, V$	Trefftz 法 自己平衡要素解を用いる最も一般的解法 (混合境界値問題のTFMと略記)
6	$\int_{S_\sigma} (T_i - \bar{T}_i)\delta u_i dS = 0$	$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \, in \, V$ $u_i - \bar{u}_i = 0 \, on \, S_u$	Pian 法
7	$\int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i)\delta T_i dS = 0$	$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \, in \, V$ $T_i - \bar{T}_i = 0 \, on \, S_\sigma$	平衡法 (Equilibrium Method)
8		$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \, in \, V$ $T_i - \bar{T}_i = 0 \, on \, S_\sigma$ $u_i - \bar{u}_i = 0 \, on \, S_u$	解析的方法 (Analytical Method) 厳密解

（3）選点法（Collocation Method）よりの脱出

有限要素法も差分法も選点法であり、その導入により今日の計算力学の驚異的発展が成し遂げられたことは事実である。しかし、同時にその大規模計算の実用化を阻むメッシュ分割や並列計算における粒度の問題が発生した。本解析法では要素境界辺又は面上の変位、境界力ベクトルを境界辺又は面上の１又は２つの流動座標に関する有限多項式に変換し、その係数を要素パラメータにとることによって節点(node)の足かせから脱出出来ることを発見し、２次元応力場及び板曲げ解析に焦点を当て、その実用化研究を展開した。

（4）解析事例の紹介

本解析法の妥当性を立証するために特に２次元応力場や板曲げ問題をx,yの多項式表示された変位関数やGoursatの応力関数を用いる方法に従い片持平面板の面内曲げ、円孔を有する矩形板が一方向引張りを受ける場合の応力集中問題、又、周辺単純支持及び固定正方形板の曲げ解析を行いTimoshenkoの有名な解や世界的に広く使われている代表的ソフトによる計算結果と詳細な比較検討を行った。その結果の一部を図１，２及び表２に示す。

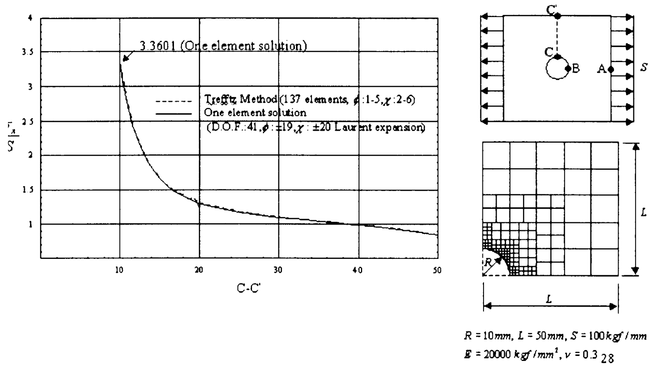

図１．円孔を有する正方形板の引張り解析

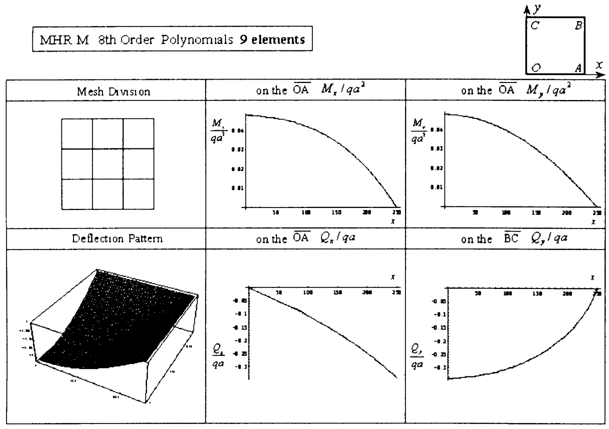

図２．一様分布荷重を受ける単純支持正方形板の曲げ解析

５）結論と今後の課題

仮想仕事の原理を一般化し、変位法を含めて８つの異なる解法が存在することを確認し、今後の有限要素法の展開方向について明快な結論を得た。これらの解法のうち変形Hellinger－Reissner法①及びTrefftz法⑤では各要素の変位場を独立に仮定できるので、現状の大規模並列計算の壁（メッシュ分割と粒度）を打ち破れる可能性が見えてきた。又解法③は申請者が開発実用化した剛体バネモデルを一般化したものであり近い将来多粒子系（粉体、多結晶体、分子科学等）への応用も可能となろう。又平衡法再生の道がひらけ、上、下界定理による挟み打ち法で計算結果の信頼性が確認できる見通しが得られた。その実現は非線形問題の解析に大きく貢献することであろう。

Mesh	Method	W_{max}	$(M_x)_{max}$	$(Q_x)_{max}$	
		α	β	γ	%
3×3	1	0.004060	0.0479	0.338	0.0
	2	0.004138	0.0472	0.160	-52.7
	3	0.004057	0.0487	—	—
	4	0.004063	0.04789	0.3385	0.1
8×8	1	0.004060	0.0479	0.338	0.0
	2	0.004082	0.0480	0.278	-7.8
	3	0.004061	0.0480	—	—
	4	0.004063	0.04791	0.3378	0.0

1: TIMOSHENKO

2: Program A

3: Program B

4: TK Method

表２．その計算結果

研究は未だ線形固体力学の2次元問題解析の範囲内に留まっているが、3次元固体、殻構造の解析を含む線形､非線形解析の基礎固めは順調に進展しており、非平衡熱力学を基礎とする移動現象問題に対する本解析法の拡張も計画中である。

参考文献

過去２年間、本研究の成果を国内外の学会、国際会議で５件の招待講演を行ったが、そのうちの代表的なものを以下に示しておく。

１．『固体力学問題の新しい離散化解析法の開発』日本機械学会材料力学部門講演会論文集 (Vol.A) NO,98－5,25－28(Nov.1998)

２．Computational mechanics for the Next Millennium, C.M.Wang, K.H.Lee, K.K.Ang, Singapore(Dec.1999)

３．Gallagher Memorial Issue, IJNME47(January, 2000)